SOBRE LAS SOLUCIONES HOMOGRAFICAS DEL PROBLEMA DE LOS TRES CUERPOS

J.C. Altavista

FCAGLP

RESUMEN: Se demuestra que las soluciones homográficas del problema de los tres cuerpos se pueden obtener usando un sistema de referencia "heliocéntrico", por medio de una expresión vectorial del problema no perturbado instantáneo.

1. Sean dadas tres masas M, m y m´, que por comodidad se denominarán respectivamente el "sol" (M) y los planetas (m y m´). Introduzcamos un sistema de coordenadas "heliocéntricas" y sean respectivamente R, R´ y Λ los vectores de posición cuyos módulos indican las distancias "planetarias" a la masa principal (r y r´) y la distancia mutua entre m y m´ (Λ).

Escribamos ahora las ecuaciones diferenciales del movimiento de los planetas respecto al sistema de referencia elegido; tenemos:

$$(1)\quad \frac{d^2\overline{R}}{dt^2} + \mu \frac{\overline{R}}{r^3} = k^2 m' \left(\frac{\overline{R}'-\overline{R}}{\Lambda^3} - \frac{\overline{R}'}{r'^3} \right); \qquad \mu = m + M$$

$$(2)\quad \frac{d^2\overline{R}'}{dt^2} + \mu' \frac{\overline{R}'}{r'^3} = k^2 m \left(\frac{\overline{R}-\overline{R}'}{\Lambda^3} - \frac{\overline{R}}{r^3} \right), \qquad \mu' = m' + M$$

Consideremos ahora las siguientes expresiones vectoriales del problema no perturbado (movimiento instantáneo)

$\ddot{\bar{R}} \times \bar{h} = \mu \dot{\bar{U}}$ planeta de masa m, $\bar{U} = \frac{\bar{R}}{r}$

$\ddot{\bar{R}}' \times \bar{h}' = \mu' \dot{\bar{U}}'$ planeta de masa m', $\bar{U}' = \frac{\bar{R}'}{r'}$

y donde h y h' son los respectivos momentos angulares de los dos "planetas". Aquí se tienen:

$$\ddot{\bar{R}} = \frac{d^2\bar{R}}{dt^2} \qquad \ddot{\bar{R}}' = \frac{d^2\bar{R}'}{dt^2}$$

Multiplicando vectorialmente la (1), por el vector h y la (2) por el vector h' nos quedan:

$$\frac{d\bar{U}}{dt} = \frac{k^2m'}{\mu}\left[\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}\right]\left[\bar{R}' \times \bar{h}\right] \tag{3}$$

$$\frac{d\bar{U}'}{dt} = \frac{k^2m}{\mu'}\left[\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r^3}\right]\left[\bar{R} \times \bar{h}'\right] \tag{4}$$

Teniendo en cuenta que por ser:

$\bar{h} = \bar{R} \times \dot{\bar{R}}$, $\bar{h}' = \bar{R}' \times \dot{\bar{R}}'$

resultan en los primeros miembros los triples productos vectoriales:

$$\ddot{\bar{R}} \times \bar{R} \times \dot{\bar{R}} \quad , \quad \ddot{\bar{R}}' \times \bar{R}' \times \dot{\bar{R}}'$$

Analicemos cuales son las condiciones para que se anulen las expresiones:

$$\frac{d}{dt}(\bar{R} \times \dot{\bar{R}}) = 0 \quad , \quad \frac{d}{dt}(\bar{R}' \times \dot{\bar{R}}') = 0$$

de las cuales se deducen obviamente las respectivas leyes areales:

$$\bar{R} \times \dot{\bar{R}} = \bar{h} \qquad \bar{R}' \times \dot{\bar{R}}' = h' \tag{5}$$

Para ello tenemos que considerar en los segundos miembros de las ecuaciones (3) y (4) primeramente los factores:

$$\frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r^3} \quad ; \quad \frac{1}{\Delta^3} - \frac{1}{r'^3}$$

Si las condiciones iniciales elegidas son tales que se cumplen permanentemente:

$$\frac{1}{\Delta^3} = \frac{1}{r^3} = \frac{1}{r'^3}$$

es evidente que nos encontramos en presencia de soluciones equilaterales (homográficas).

Si en cambio tenemos en cuenta en las ecuaciones (3) y (4) los respectivos factores vectoriales:

$$\overline{R}' \times \dot{\overline{R}} \times \overline{R} \quad , \quad \overline{R} \times \overline{R}' \times \overline{R}'$$

resulta que las únicas condiciones compatibles con la validez de las leyes areales:

$$\dot{\overline{R}} \times \overline{R} = cte \quad , \quad \dot{\overline{R}}' \times \overline{R}' = cte$$

son aquellas que manifiestan que las tres masas permanecen colineales. En este caso arribamos a las correspondientes soluciones descubiertas por Euler.

REFERENCIAS

Stumpff, Karl. 1965, Himmelsmechanik, VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN, Band II, Berlin.